Álgebra

Instituto Superior de Formación Docente y Técnica Nº 89 de Mar de Ajó
Dirección General de Cultura y Educación. Gobierno de la Provincia de Buenos Aires
Introducción: Compilación y adaptación realizada por Roque R. Rivas – 2011

Introducción

En el siglo VI a. C. los pitagóricos colocaron a la aritmética de los números enteros y racionales en la base matemática. El descubrimiento de las magnitudes geométricas, que no se puede expresar como relaciones entre números enteros, demostró que los números racionales no son una base adecuada para la geometría.

En el siglo III a.C. todo el edificio fue reconstruido por Euclides sobre los cimientos de la geometría. Los números enteros y sus operaciones perdieron el rol de las entidades primitivas y fueron reducidos a las medidas de segmentos y de sus combinaciones: por ejemplo, los productos a la medida del área de un rectángulo.

En el siglo XVII, Descartes inauguró un nuevo paradigma numérico, basado en lo que hoy llamamos análisis, es decir en los números reales. La geometría se volvió analítica y puntos y entidades geométricas se redujeron a coordenadas y ecuaciones: por ejemplo, las rectas a ecuaciones de primer grado

En el siglo XIX se cerró el círculo, y el análisis fue reducido a la aritmética. Los números reales fueron definidos como conjuntos de sus aproximaciones racionales, y la novedad esencial que permitió a los modernos esta transformación fue la consideración actual del infinito, que los griegos, en cambio, rechazaban.

Teoría

La palabra teoría deriva del griego θεωρειν, "observar". De acuerdo con algunas fuentes, theorein era frecuentemente utilizado en el contexto de observar una escena teatral, lo que quizá explica el porqué algunas veces la palabra teoría es utilizada para representar algo provisional o no completamente real.
Sin embargo pronto adquirió un sentido intelectual, siendo aplicado a la capacidad del entendimiento de "ver" mas allá de la experiencia sensible, mediante la comprensión de las cosas y de las experiencias, comprendiéndolas bajo un concepto expresado en el lenguaje mediante las palabras.
Esta forma de valorar el conocimiento intelectual corresponde a los griegos, al entender que las cosas suceden conforme a leyes, es decir por necesidad. Las cosas son y suceden así porque son y tienen que ser así. Superan así la visión mítico-religiosa de las tradiciones culturales.

Pero es quizás Platón quien da a la idea de teoría el carácter de "visión del alma", que supera lo sensible y contempla en las ideas directamente la verdad y de ahí su paso del concepto de teoría al dominio de la ciencia. Y Aristóteles, su discípulo, define la ciencia como el conocimiento que va de lo necesario a lo necesario por medio de lo necesario, señalando además el carácter lógico y formal de la ciencia.

Una teoría es un sistema lógico compuesto de observaciones, axiomas y postulados, que tienen como objetivo declarar bajo qué condiciones se desarrollarán ciertos supuestos, tomando como contexto una explicación del medio idóneo para que se desarrollen las predicciones. A raíz de estas, se pueden especular, deducir y/o postular mediante ciertas reglas o razonamientos, otros posibles hechos.

El término "teórico" o "en teoría", es utilizado para describir ciertos fenómenos, frecuentemente indica que un resultado particular ha sido predicho por la teoría pero no ha sido aún observado. Por ejemplo, hasta hace poco, los [agujeros negros] fueron considerados teóricos. Es frecuente en la historia de la física el que una teoría produzca predicciones posteriormente confirmadas mediante nuevos experimentos u observaciones.

Tipos de teoría

Hay dos categorías de ideas que pueden desembocar en teorías: si una suposición no es respaldada por observaciones se conoce como una conjetura, en cambio, si es así respaldada, es una hipótesis. Muchas hipótesis resultan ser falsas y, por lo tanto, no evolucionan. Una teoría es diferente de un teorema. La primera es un modelo de eventos físicos y no puede ser probado a partir de axiomas básicos. El segundo es una proposición de un hecho matemático que sigue lógicamente a un conjunto de axiomas.

Una teoría es también diferente de una ley física modelo de la realidad mientras que la segunda es una proposición acerca de lo que ha sido observado. Las teorías pueden llegar a ser aceptadas si son capaces de realizar predicciones correctas más simples y más elegantes matemáticamente, tienden a ser aceptadas preferentemente sobre aquellas que son más complejas. El proceso de aceptar teorías, o de extender teorías existentes, es parte del método científico.

Teorema

Es una sentencia que se puede verificar que es verdadera. A veces los teoremas se llaman proposiciones, hechos o resultados. La verdad de un teorema se demuestra mediante una secuencia de sentencias que constituyen un argumento llamado demostración.
Para construir demostraciones se necesitan métodos para derivar sentencia nuevas a partir de las conocidas.
Las sentencias pueden incluir axiomas o postulados, que son suposiciones que subyacen a las estructuras matemáticas, hipótesis del teorema o teoremas demostrados previamente.
Algunas formas de razonamiento incorrecto, como las falacias, son útiles para demostrar teoremas.
En algunos teoremas se suelen emplear los términos lema o corolario. El lema es un teorema sencillo utilizado en la demostración de otros teoremas. En el caso de demostraciones complicadas son más fáciles de entender haciendo uso de lemas, los cuales se demuestran por separado.
Un corolario es una proposición que se puede establecer directamente a partir de un teorema que ya ha sido demostrado.
Un conjetura es una sentencia cuyo valor de verdad es desconocido. Cuando se encuentra una demostración para una conjetura, ésta se convierte en teorema.
Los métodos de demostración son útiles tanto para la matemática como para la ciencia de la computación. Por ejemplo la verificación de un programa, la seguridad de un sistema operativo, el hacer ingerencias en el área de la inteligencia artificial, etc.

Teoría en matemáticas

En matemáticas, una teoría es un conjunto de proposiciones cerradas bajo implicación y deducción lógica, es decir, si «P» y «P implica Q» son proposiciones de una teoría entonces también Q debe ser una proposición de esa teoría, ya que es deducible de las anteriores.
En lógica matemática, "teoría" es el término usado para un conjunto de fórmulas consistentes de ciertos axiomas y todos los teoremas comprobables a partir de éstos. El teorema de incompletitud de Gödel establece que ninguna teoría consistente, con un número finito de axiomas (en un lenguaje por lo menos tan potente como la aritmética), puede incluir todos las proposiciones verdaderas.

Lógica formal

La lógica formal, a diferencia de la lógica informal, se dedica al estudio de los razonamientos correctos, desarrollándolos de manera formal y esquematizada, es decir de una forma no cotidiana. Este tipo de lógica parte de los razonamientos correctos conocidos para desarrollar una teoría lógica y consecuentemente, razonamientos más complejos que no se utilizan normalmente en la vida cotidiana. A partir de la idea de que quien la estudia "razona bien", puede desarrollar argumentos racionales extremadamente complejos, y de gran alcance.

Lógica

La Lógica es un término que deriva del griego "Λογικός" (logikê-logikós), que a su vez es "λόγος" (logos), que significa razón.
Se considera que Aristóteles fue el que fundó la Lógica como Propedéutica, herramienta básica para todas las Ciencias.
La Lógica básicamente es una ciencia formal. Esto quiere decir que no tiene contenido, porque estudia las formas válidas de inferencia.
La lógica tradicional se basaba en el silogismo como razonamiento basado en el juicio categórico aristotélico. Hoy día la lógica utiliza como unidad básica la proposición y las reglas de inferencia en la argumentación discursiva.
Nota: Se considera a Aristóteles (siglo IV a. C.) el fundador de la lógica. Para Aristóteles, la lógica era una propedéutica o introducción al saber general, pues constituye una especie de instrumento de todas las ciencias. ver más en Clasificación de las ciencias

1.- La Inferencia

Consiste en derivar la verdad de una proposición llamada conclusión de la verdad de otras proposiciones llamadas premisas. Es decir que es una estructura de proposiciones donde, de una o más proposiciones llamadas premisas, se deriva otra llamada conclusión.
Nota: En la lógica tradicional se habla deducción; hoy se prefiere la idea de inferencia. La deducción introduce la idea de paso de lo general a lo particular. La inferencia únicamente hace referencia a la derivación lógica como aplicación de la regla. Esta matematización tiene una importancia solamente formal, pues en realidad cualquier aplicación de una regla, supone un principio general a una situación o proposición particular. En síntesis, las reglas de inferencia, son los medios empleados para deducir conclusiones a partir de otras afirmaciones al enlazar los pasos de una demostración.

2.- Condicionantes

La lógica plantea certezas lógicas y las encuentra en sus leyes lógicas o tautologías (por ejemplo en las proposiciones compuestas) convertidas en reglas cuya aplicación encadenada sobre verdades o certezas axiomática o empíricamente establecidas constituyen el desarrollo de los argumentos lógicos como inferencias o razonamientos deductivos.

Cuando en un argumento o discurso se viola una regla lógica, se dice que se ha cometido una falacia. Cuando se requiere poner voluntad para conservar la veracidad del planteamiento, se dice que la misma es sesgada. Cuando hay un interés personal, se dice que es egoísta. Cuando únicamente recoge una serie de hechos, describiendo las transformaciones entre los hechos, se dice que el resultado se verifica, bien sea cierto o falso.
Existe también una división entre lo llamado "falacia indirecta" y "falacia bella" o "falacia de redondeo", en la que la expresión se materializa como un elemento del contexto llamado "wittgensteiniano", en honor del filósofo austriaco Ludwig Wittgenstein

3.- Historia de la lógica

Históricamente la palabra "lógica" ha ido cambiando de sentido. Comenzó siendo una modelización de los razonamientos, propuesta por los filósofos griegos, y posteriormente ha evolucionado hacia diversos sistemas formales, relacionados con la teoría.

La lógica formal, como un análisis explícito de los métodos de razonamientos, se desarrolló originalmente en tres civilizaciones de la historia antigua: China, India y Grecia entre el Siglo V y el Siglo I a. C.

En China no duró mucho tiempo: la traducción y la investigación escolar en lógica fue reprimida por la dinastía Qin, acorde con la filosofía legista. En India, la lógica duró bastante más: se desarrolló (por ejemplo con la nyaya) hasta que en el mundo islámico apareció la escuela de Asharite, la cual suprimió parte del trabajo original en lógica. (A pesar de lo anterior, hubo innovaciones escolásticas indias hasta principios del siglo XIX, pero no sobrevivió mucho dentro de la India Colonial). El tratamiento sofisticado y formal de la lógica moderna aparentemente proviene de la tradición griega.

Aristóteles fue el primero en emplear el término “Lógica” para referirse al estudio de los argumentos dentro del "lenguaje apofántico" como manifestador de la verdad en la ciencia. Pensaba que la verdad se manifiesta en el juicio verdadero y el argumento válido en el silogismo: “Silogismo es un argumento en el cual, establecidas ciertas cosas, resulta necesariamente de ellas, por ser lo que son, otra cosa diferente”. Aristóteles formalizó los modos válidos y no aceptó más que tres figuras y no todos los modos; fue más exigente en el rigor de la lógica que los escolásticos posteriores. Los estoicos habían introducido los silogismos hipotéticos y anunciaron la lógica proposicional pero no tuvo desarrollo. Asimismo en el siglo XVII los racionalistas de Port Royal ampliaron los fundamentos lógicos formales.

Nació así la lógica formal. Aristóteles formalizó el cuadro de oposición de los juicios y las formas válidas del silogismo. Kant en el siglo XVIII pensaba que Aristóteles había llevado la lógica formal a su perfección, por lo que básicamente hasta entonces no había habido prácticamente modificaciones de importancia. Y lo justificaba al considerar que siendo la lógica una ciencia formal, era por ello analítica y a priori, lo que justifica su necesidad y su universalidad, pues es la razón la que trata consigo misma respecto a sus leyes del pensar, sin contenido de experiencia alguno.

En la filosofía tradicional, por otro lado, la “Lógica Informal”, o el estudio metódico de los argumentos probables fue investigada por la retórica, la oratoria y la filosofía, entre otras ramas del conocimiento. Se especializó medularmente en la identificación de falacias y paradojas, así como en la construcción correcta de los discursos. Aristóteles asimismo consideró el argumento inductivo, base de lo que constituye la ciencia experimental, cuya lógica está ligada al progreso de la ciencia y al método.

A partir de mediados del Siglo XIX la lógica formal comenzó a ser estudiada en el campo de las matemáticas y posteriormente por las ciencias computacionales, naciendo así la lógica simbólica. La lógica simbólica trata de esquematizar los pensamientos de forma clara y sin ambigüedades. Para ello usa un lenguaje formalizado constituido como cálculo. Así, en la edad contemporánea, la lógica generalmente es entendida como un cálculo y se aplica a los razonamientos en una forma prescripta mediante aplicación de reglas de inferencia como un cálculo lógico o matemático.

Hoy día se considera una única ciencia lógico-matemática cuya expresión más importante en el campo de la ciencia es la creación de modelos gracias sobre todo a la aplicación técnica en los circuitos lógicos que hacen posible la informática y el cálculo numérico. Tema a desarrollar en el cursado de la materia.

Si bien a lo largo de este proceso la lógica aristotélica pareció inútil e incompleta, Luckasiewicz mostró que, a pesar de sus grandes dificultades, la lógica aristotélica era consistente, si bien había que interpretarse como lógica de clases, lo cual no es pequeña modificación. Por ello la silogística prácticamente no tiene uso actualmente. Para la lógica matemática y la filosofía analítica, la lógica es un objeto de estudio en sí misma, por lo que esta es estudiada a un nivel más abstracto.

Existen muchos otros sistemas lógicos, como la lógica dialéctica, lógica difusa, lógica probabilística, lógica modal y la lógica no monótona.

Para algunos autores, la lógica tendría que partir de una suficiente meditación del λόγος (lógos), el cual debería ser distinguido de la ratio (razón), que, en rigor, significa algo distinto.

4.- Lógica y ciencia

La lógica estudia los problemas y las leyes del pensar formal. La lógica no entra en definir qué es verdad y qué es falsedad material. Esos conceptos, al tener contenido semántico, son competencia del razonamiento aplicado a la experiencia. Pero la ciencia para elaborar sus razonamientos necesita la lógica.

Los razonamientos formales, o inferencias válidas, son indispensables para todas las ciencias. La filosofía, como epistemología o filosofía de la ciencia estudia las condiciones del pensar científico y metodológico y las condiciones de verdad de las teorías científicas, así como su alcance y límites.

Sistemas lógicos

- Lógica aristotélica
- Lógica baconiana
- Lógica matemática
- Lógica de primer orden
- Lógica de segundo orden
- Lógica intuicionista
- Lógica temporal
- Lógica modal
- Lógica no monotónica
- Lógica formal
- Lógica informal
- Lógica polivalente
- Lógica proposicional
- Lógica booleana
- Lógica descriptiva
- Lógica predicativa
- Lógica transcendental
- Empirismo lógico
- Lógica unidireccional
- Lógica difusa

La Mathematics Subject Classification divide la lógica matemática en las siguientes áreas:

- Filosófica y crítica
- Lógica general (que incluye campos como la lógica modal y la lógica borrosa)
- Teoría de modelos
- Teoría de la computabilidad
- Teoría de conjuntos
- Teoría de la demostración y matemática constructiva
- Lógica algebraica
- Modelos no-estándar

En algunos casos hay conjunción de intereses con la Informática teórica, pues muchos pioneros de la informática, como Alan Turing, fueron matemáticos y lógicos. Así, el estudio de la semántica de los lenguajes de programación procede de la teoría de modelos, así como también la verificación de programas, y el caso particular de la técnica del model checking.

También el isomorfismo de Curry-Howard entre pruebas y programas se corresponde con la teoría de pruebas, donde la lógica intuicionista y la lógica lineal son especialmente significativas. Algunos sistemas lógicos como el cálculo lambda, y la lógica combinatoria entre otras han devenido, incluso, auténticos lenguajes de programación, creando nuevos paradigmas como son la programación funcional y la programación lógica.

La lógica de predicados es un lenguaje formal donde las sentencias bien formadas son producidas por las reglas enunciadas a continuación.

Lenguajes y estructuras de primer orden

Un lenguaje de primer orden' $\mathfrak{L}$ es una colección de distintos símbolos clasificados como sigue:

1. El símbolo de igualdad $=$; las conectivas $\vee, \neg$; el cuantificador universal $\forall$ y el paréntesis $(,)$.
2. Un conjunto contable de símbolos de variable $\{v_i\}_{i=0}^{\infty}$.
3. Un conjunto de símbolos de constante $\{c_\alpha\}_{\alpha\in A}$.
4. Un conjunto de símbolos de función $\{f_\beta\}_{\beta\in B}$.
5. Un conjunto de símbolos de relación $\{R_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$.

Así, para especificar un orden, generalmente sólo hace falta especificar la colección de símbolos constantes, símbolos de función y símbolos relacionales, dado que el primer conjunto de símbolos es estándar. Los paréntesis tienen como único propósito de agrupar símbolos y no forman parte de la estructura de las funciones y relaciones.

Los símbolos carecen de significado por sí solos. Sin embargo, a este lenguaje podemos dotarlo de una semántica apropiada.
Una $\mathfrak{L}$-estructura sobre el lenguaje $\mathfrak{L}$, es una tupla consistente en un conjunto no vacío A, el universo del discurso, junto a:

1. Para cada símbolo constante c de $\mathfrak{L}$, tenemos un elemento $c^{\mathfrak{A}} \in A$.
2. Para cada símbolo de función n-f de $\mathfrak{L}$, una función n $f^{\mathfrak{A}} : A^n \longrightarrow A$.
3. Para cada símbolo de relación n R de $\mathfrak{L}$, una relación n sobre A, esto es, un subconjunto $R^{\mathfrak{A}} \subseteq A^n$.

Lógica informal

La lógica informal, o lógica no formal, es el estudio de los argumentos, tal como se presentan en la vida diaria, en oposición al estudio de los argumentos en una forma técnica o artificial, que corresponde a la lógica formal. Esta parte de la lógica se dedica principalmente a diferenciar entre formas correctas e incorrectas en que se desarrolla el lenguaje y el pensamiento cotidiano, en especial al estudio de los procesos para obtener conclusiones a partir de información dada. Parte del principio que el pensamiento y el lenguaje humano es a menudo incorrecto, o tendencioso. En este tipo de lógica también se le atribuyen sus inicios a Aristóteles, que hizo el primer estudio de las falacias lógicas, que se encuentran en la vida cotidiana.
Motivos de controversias en los pensamientos: Un buen ejemplo de una "teoría" no científica es el Diseño Inteligente. Asimismo, otros conjuntos de afirmaciones como la homeopatía tampoco son teorías científicas, sino pseudociencia.

Bibliografía

- Odifreddi, P.: 2006. La matemática del siglo XX. Editorial Katz Editores.
- Mitchell, D.: 1968. Introducción a la lógica, Editorial Labor, Barcelona.
- Johnsonbauch, R.: 1998. Matemáticas discretas. Grupo Editorial Iberoamérica.
- Obtenido de "http://es.wikipedia.org/wiki/Teor%C3%ADa".
- Agazzi, E.: 1986. Lógica simbólica, Editorial Herder.
- Rivas, R.: 2007: Ergonomía en el diseño y la producción industrial. Editorial Nobuko